

## VEKTORANALYSIS

Am Beispiel eines Igels lernen wir ein wichtiges Resultat der Vektoranalysis kennen. Dies zeigt uns auch, wie viel wir in den ersten zehn Wochen des Semesters bereits gelernt haben.

**[P29]** *Das Kämmen eines Igels*

Einen Igel kann man nicht (ohne Wirbel) kämmen. Mathematisch ausgedrückt heißt das, dass jedes reelle, stetige Vektorfeld auf  $S^2$  mindestens eine Nullstelle hat.

Sei  $v(u^1, u^2)$  ein Vektorfeld in Südkoordinaten (gemeint sind die Koordinaten der stereographischen Projektion vom Nordpol aus), das in der Umgebung des Südpols verschieden von Null ist, o.B.d.A.

$$v|_{\text{Südpol}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Wenn  $(u^1, u^2)$  einen Punkt in Südkoordinaten bezeichnet, wie lauten dann seine Nordkoordinaten  $(u'^1, u'^2)$ ? *Hinweis:* Inversion am Einheitskreis.
- Wie lautet die Jacobi-Matrix  $J$ ,  $J^i_j = \partial_{u^j} u'^i$  zur Umrechnung der Komponenten von Vektoren ineinander?
- Sei konkret  $(u^1, u^2) = (u \cos \varphi, u \sin \varphi)$  über den Betrag  $u$  und Winkel  $\varphi$  parametrisiert. Wie lautet die Jacobi-Matrix  $J$ ? Verwenden Sie die Additionstheoreme von  $\cos$  und  $\sin$ , um diese möglichst einfach zu schreiben.
- Überlegen Sie, was für eine lineare Abbildung die Jacobi-Matrix darstellt, was also ihre geometrische Bedeutung ist. (Ist  $J$  eine Drehstreckung? Was sind die Eigenrichtungen?)
- Das Vektorfeld  $v$  transformiert als ein Vektor,  $v' = Jv$ . Wie sieht demnach  $v'$  in Nordkoordinaten aus?
- Verdeutlichen Sie sich Ihre Ergebnisse mit Skizzen, in dem Sie sich speziell das Verhalten des Vektorfeldes auf einem Kreis um den Südpol herum ansehen. Wie oft windet sich das Vektorfeld um diesen Kreis, wenn Sie es in Nordkoordinaten ansehen?
- Überlegen Sie, dass sich die Windungszahl bei stetigen Änderungen der Kurve nicht ändern kann, solange keine Nullstelle von  $v$  überquert wird. Welcher Widerspruch ergibt sich, wenn Sie die Kurve in Gedanken zum Nordpol hin zusammenziehen und  $v$  keine Nullstelle hätte?

**[P25]** *SU(2) und Drehungen*

Setzen Sie die Bearbeitung dieser Aufgabe von vorvorletzter Woche fort.